MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2012	DUREE : 4 H
	MATHEMATIQUES	Coef. : 3
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE D	

SESSION NORMALE

Exercice 1 (4 points)

Le tableau suivant donne l'évolution du prix en dollar ($) de la tonne d'une terre rare entrant dans la fabrication d'un composant électronique ces dix dernières années.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix de la tonne en $ (y_i)	38	45	40	55	70	60	75	80	95	106

1-a/ Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unités : 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour dix dollars en ordonnée. (0,75 pt)

b/ Calculer les coordonnées du point moyen G. (0,5 pt)

2-a/ Calculer à 10^{-2} près par excès, le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, y_i).
En déduire qu'un ajustement affine est justifié. (1 pt)

b/ Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite de régression linéaire (D) de y en x. (On donnera les coefficients à 10^{-2} près par excès). (0,5 pt)

c/ Tracer la droite (D) dans le même repère que celui du nuage des points. (0,25 pt)

3- En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon dans les années à venir :

a/ Donner une estimation du prix de la tonne de cette terre rare en 2016. (0,25 pt)

b/ En quelle année le prix de la tonne de cette terre rare dépassera 180 $. (0,75 pt)

Exercice 2 (4 points)

On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - (4+i)z^2 - (13+4i)z - 13i = 0$.

1- a/ Vérifier que i est solution de (E). (0,25 pt)

b/ Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :
$\forall z \in \mathbb{C}$, $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$. (0,5 pt)

c/ En déduire les solutions de (E). (0,5 pt)

2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixe $z_A = i$, $z_B = 2 + 3i$ et $z_C = 2 - 3i$.

a/ Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
Déterminer l'affixe $z_{A'}$ du point A' image de A par r. (0,75 pt)

b/ Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_{A'}}$. En déduire l'existence d'une homothétie h de centre B qui transforme A' en C et préciser son rapport. (1 pt)

3- On considère la transformation plane s définie par : $s = h \circ r$

a/ Quelle est l'image de A par s. (0,25 pt)

b/ Préciser la nature et les éléments géométriques de s. (0,75 pt)

Problème (12 points)

Soit k un entier naturel non nul. On considère la fonction f_k définie sur IR par : $f_k(x) = x^k(e^{-x} - \frac{1}{2})$.
On note (C_k) la courbe représentative de f_k dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

... considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

A/

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1- Etudier le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$. (1 pt)

2- a/ Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[0; +\infty[$. (0,5 pt)
On note α cette solution.

b/ Prouver que : $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$. (0,5 pt)

3- En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. (0,5 pt)

B/

1- a/ Montrer que, pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$. (0,5 pt)

b/ En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$. (0.25 pt)

2- a/ Montrer que, pour tout réel positif x, $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$. (0,25 pt)

b/ En déduire la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat trouvé. (0,5 pt)

3- a/ Etablir que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$. (0,5 pt)

b/ En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A/2-, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}. (0,25 pt)

4- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0. (0,25 pt)

5- a/ Etablir que pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$,
$f(x) - x = \frac{(x+1)\varphi(x)}{xe^x+1}$ avec $\varphi(x) = e^x - xe^x - 1$. (0,5 pt)

b/ Etudier le sens de variation de φ sur $[0; +\infty[$. (0,5 pt)
En déduire le signe $\varphi(x)$ sur $[0; +\infty[$. (0,25 pt)

c/ Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T). (0,25 pt)

d/ Tracer (C) et (T). (1,5 pts)

C/

1- Déterminer une primitive F de f sur $[0; +\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie en B/2-. (0,5 pt)

On note D le domaine du plan limité par la courbe (C), la tangente (T), les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

2- Calculer en cm² l'aire A du domaine D. (0,5 pt)

3- Pour tout entier naturel k, on pose $V_k = \int_k^{k+1} f(x)dx$.

a/ Calculer V_0, V_1 et V_2. (1 pt)

b/ Démonter que pour tout entier naturel $k \geq 2$, $f(k+1) \leq V_k \leq f(k)$. (1 pt)

c/ Déduire la limite de V_k quand k tend vers $+\infty$. (0,5 pt)