UNIVERSITE DU BENIN
OFFICE DU BACCALAUREAT

BACCALAUREAT 2001 Session Normal
MATHEMATIQUES Coef. : 3
SERIE D Durée : 4 H

EXERCICE 1 - (4 pts)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 10.
On tire simultanément 4 boules de l'urne.

1 - Combien y-a-t-il de tirages possibles ? (0,5 pt)

2 - Soit X la variable aléatoire : "nombre de boules portant un numéro impair parmi les 4 boules tirées".
Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et son écart-type.(2 pts)

3 - On considère la variable aléatoire Y égale au plus grand numéro obtenu en effectuant le tirage simultané de 4 boules.
a- Déterminer la loi de probabilité de Y. (1 pt)
b- En déduire que :
$$C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 + C_7^3 + C_8^3 + C_9^3 = C_{10}^4 \text{ ; (0,5 pt)}$$

EXERCICE 2. (5 pts)

Soit l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$$Z \longmapsto Z' = (1+i)Z + 3$$

M et M' désignent, dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$, les points d'affixes respectives Z et Z' (unité graphique 2 cm)

1 - Soit le nombre complexe $a = \sqrt{2} + i$.
Calculer f(a) et placer sur une figure les points A d'affixe a et A' d'affixe f(a).(0,75 pt)

2 - Montrer que l'équation $Z = f(Z)$ possède dans $\mathbb{C}$ une unique solution Zo.(0,5 pt)

3 - Soit K le point d'affixe 3i.
a- Calculer $\frac{Z - Z'}{Z - 3i}$ pour $Z \neq 3i$ (0,5 pt)
b- Montrer que, pour tout point M différent de K, le triangle KMM' est un triangle rectangle isocèle dont on précisera le sommet de l'angle droit.
En déduire une construction du point M' connaissant un point M du plan.
Faire cette construction.(1,5 pts)

4- a- Démontrer que l'ensemble (C) des points M du plan P tels que O, M et M' sont alignés est le cercle de diamètre [OK]. (1,25 pts)
b- Vérifier que le point A défini au 1-) appartient à (C).
Tracer (C) dans le repère précédent. (0,5 pts)

PROBLEME (11 pts)

Soit la fonction numérique f définie par :
$$f(x) = 2x + \frac{e^x + 1}{2(e^x - 1)}$$
(C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1cm)

hotyo Boy My Swager Name

Partie A :

1 - Déterminer l'ensemble de définition D de f et étudier la parité de f. (0,75 pt)

2 - Montrer que pour tout x de D, on a : (0,5 pt)

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$$

3 - Calculer les limites de f en o et en $+\infty$ (0,75 pt)

4 - a- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f en $+\infty$ (0,5 pt)

b- Etudier la position de (C) par rapport à (Δ) (0,75 pt)

c- Déterminer les autres asymptotes à la courbe (C). (0,5 pt)

Partie B :

1 - Résoudre dans R l'inéquation : $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$; (0,75 pt)

2 - Déterminer la fonction dérivée de f et dresser le tableau de variation de f. (1 pt)

3 - Tracer (C) ainsi que ses asymptotes dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (1 pt)

4 - Déterminer l'intersection de (C) et de la droite (Dm) d'équation $y = 2x + m$ où m est un paramètre réel. (1 pt)

Partie C :

Soit n un entier naturel supérieur à 1.

On définit : $I_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t - 1} dt$

1- a- A l'aide de la courbe représentative (C) de f, donner une interprétation graphique du nombre I_n. (0,5 pt)

b- Prouver que $I_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ pour tout n supérieur à 1. (0,5 pt)

c- Calculer les limites de I_n lorsque n tend vers 1 et lorsque n tend vers $+\infty$ (0,5 pt)

2 - On considère $S_n = I_2 + I_3 + I_4 + ... + I_n$.

A l'aide de la courbe (C) de f, donner une interprétation graphique du nombre S_n
Calculer S_n. (1 pt)

3 - Calculer en cm², l'aire A(n) de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ et les droites d'équation $x = \ln 2$ et $x = \ln(n+1)$
Déterminer la limite de A(n) lorsque n tend vers $+\infty$. (1 pt)