

EPREUVES - TG. COM

SESSION NORMALE

EXERCICE 1. (05pts)

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x}{1+x+x^2}$

- 1) Etudier le sens de variations de f et dresser le tableau de variation. En déduire l'image de l'intervalle $[0, 1]$ par f . (1,5 pts)
- 2) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f au point d'abscisse 0. Préciser la position de (T) par rapport à (C) (1 pt)
- 3) On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $U_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a- Démontrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N}^* on a : $U_n \in [0; 0,5]$ (0,5 pt)

b- Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , $U_{n+1} \leq U_n$. (0,5 pt)

4) Démontrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

En déduire par récurrence que pour tout n de \mathbb{N}^* , $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n}$.

Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite. (1,5 pt)

EXERCICE 2. (04 pts)

Un test médical sert à dépister une certaine maladie dans une population donnée. D'une façon générale le résultat du test est positif pour les individus atteints de la maladie et négatif pour les individus non atteints. Pour limiter d'éventuelles erreurs, on effectue un contrôle en reprenant le même test dans les conditions garantissant l'indépendance des résultats. Pour tout individu X , on désigne par :

T_1 , l'évènement : "le test est positif pour X "

\bar{T}_1 , l'évènement : "le test est négatif pour X ".

M , l'évènement : " X est atteint de la maladie"

\bar{M} , l'évènement : " X n'est pas atteint de la maladie"

T_2 , l'évènement : "le test est négatif pour X les deux fois"

Après un certain nombre d'études statistiques on n'est conduit à admettre les probabilités suivantes :

$$P_M(T) = 0,95 \quad P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,97 \quad P(M) = 0,1$$

1) Observation des résultats avant le contrôle

a- Calculer les probabilités des évènements suivants :

A : " X est atteint de la maladie et le test est positif pour X "

B : " X n'est pas atteint de la maladie et le test est positif pour X "

En déduire la probabilité de T puis celle de \bar{T} (1,5 pts)

b- Calculer la probabilité pour que X soit atteint de la maladie et que le test soit négatif pour X .

En déduire la probabilité pour que X soit atteint de la maladie sachant que le test est négatif pour X . (1 pt)

2) Observation des résultats après le contrôle.

a- Quelle est la probabilité de T_2 ?

Quelle est la probabilité pour que le test soit négatif les deux fois sachant que X est atteint de la maladie. (0,75 pt)

b- Déduire de a- la probabilité pour que X soit atteint de la maladie et que le test soit négatif les deux fois sachant que X soit atteint de la maladie.